

Dörtgenler Arasındaki İlişkiler: 7. Sınıf Öğrencilerinin Kavram İmajları *

Behiye UBUZ**

Öz: Bu çalışma, öğrencilerin dörtgenler arasındaki ilişkiler ile ilgili kavram imajlarını incelemeyi amaçlamıştır. Çalışmaya Ankara da bulunan 12 farklı okuldan toplam kırk 7. sınıf öğrencisi katılmıştır. Veriler üç aşamada toplanmıştır. İlk olarak, Van Hiele Geometri testinin ilk 15 sorusu öğrencilerin dörtgenlere yönelik kavram imajlarını belirlemek için uygulanmıştır. Van Hiele geometri testinin sonuçları ışığında, öğrencilerin karenin tanımını, kare-dikdörtgen ve kare-eşkenar dörtgen arasındaki benzerlik ve farklılıkları ve dörtgenlerin sınıflandırmasını yazılı olarak ifade etmeleri istenmiştir. Son olarak da, bir öğrencinin yapmış olduğu dörtgenlerin sınıflamasından yola çıkarak bu konuda sınıf ortamında bir tartışma gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmanın sonuçları göstermektedir ki dörtgenler arasındaki ilişkilerin özellikle de hiyerarşik ilişkilerin kurulmasında dörtgenlere ait olan formel tanımlar ile öğrencilerin bunlara ait olan kavram imajları arasındaki farklılaşma önem arz etmektedir. Kavram imajının oluşumunda şekiller çok büyük rol oynamaktadır. Sonuç olarak, dörtgenlerin ve aralarındaki ilişkilerin kavranması ile ilgili öneriler sunulmaktadır.

Anahtar Sözcükler: dörtgenler, geometri, kavram imajı, sınıflandırma, şekiller, tanım

Relations among Quadrilaterals: 7th Grade Students' Concept Images

Abstract: This study aimed to investigate students' concept images about relations among quadrilaterals. Forty 7th grade students from 12 different schools in Ankara participated in the study. Data were collected in three stages. First, the first 15 questions of the Van-Hiele Geometry test were administered to the students to determine their concept images regarding quadrilaterals. In the light of the Van-Hiele geometry test results, students were required to provide their written responses to the open-ended questions about definition of square, similarity and differences between square-rectangle and square-rhombus, and classification of quadrilaterals. Lastly, a discussion was conducted in the classroom based on a student's classification of quadrilaterals. The results indicated that while establishing relations among quadrilaterals, particularly the inclusion relations, the differentiation between a formal definition and students' concept images about it is of particular importance. Figures play a significant role in the formation of concept images. In conclusion, suggestions are provided to help students understand quadrilaterals and the relations between them.

Keywords: classification, concept image, definition, figures, geometry, quadrilaterals,

Geometrik kavramların anlamları oluşurken öğrencilerin sahip oldukları zorlukların çoğu bir kavramın formel tanımı ile kavram imajı arasındaki farklılaşma ile ilgilidir (Tall & Vinner, 1981; Vinner & Dreyfus, 1989). Yani, bir kavramın tanımı gerçek anlamından

* Bu çalışma 2008 tarihinde Bolu da gerçekleştirilen VIII. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresinde sözlü bildiri olarak sunulan çalışmanın genişletilmiş halidir.

** Prof. Dr., Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Ankara, Türkiye, e-posta: ubuz@metu.edu.tr

saptırılmaktadır. Kavram imajı, bir kişinin bir kavram ile ilgili bilmeye ve kavramaya yönelik sahip olduğu bütün yapıdır (Tall & Vinner, 1981). Bir kavramın ismi ve/veya şekli ile ilgili olan bütün deneyimleri içerir. Bu deneyimlerde, yani matematiksel fikirler, matematiksel dil aracılığıyla iletilir. Farklı çeşitteki dillerin hepsi matematiksel dilin bir parçasıdır ve bireysel düşünme süreçlerini dönüştürmek için araçlardır. Farklı çeşitli diller: kullanılan dil (konuşulan veya yazılan), grafikler, şekiller, semboller ve diğerleridir (Vlassis, 2008).

Kavram tanımı, bir kavramı açıkça belirtmek için kullanılan kelimeler ve semboller vücudu veya biçimidir. Tanımlar hiyerarşik veya bölümlü yapıda (De Villers, 1994) karşımıza çıkmaktadır. Hiyerarşik tanımlamada (De Villers, 1994), daha özel kavramlar daha genel kavramların bir alt sınıfı olarak tanımlanır. Örneğin, karenin “bütün kenarları eşit olan dikdörtgen”, “bütün iç açıları 90 derece olan eşkenar dörtgen” ve “bütün kenarları eşit ve bütün açıları 90 derece olan paralelkenar” olarak tanımlanması gibi. Bu tanımlar bağlamında kare hem dikdörtgen, hem eşkenar dörtgen, hem de paralelkenardır. Shir ve Zaslavsky’nın (2001) belirttiği üzere bir kavramın hiyerarşisinin derecesi değişebilir ve geri gidildikçe derece düşer. Örneğin kareyi dikdörtgen ve eşkenar dörtgene bağlı olarak tanımlamak 1. seviye ve en fazla hiyerarşik seviyedir. Kareyi paralelkenara bağlı tanımlamak 2. seviye, dörtgene bağlı olarak tanımlama 3. seviye ve çokgene bağlı tanımlama 4. seviyedir. Bölümlü tanımlamada genel olarak kavramın tüm özelliklerine vurgu yapılarak ekonomik olmayan tanım yapılır. Örneğin; karenin “dört kenarının uzunluğu birbirine eşit, karşılıklı kenarları birbirine paralel, dört açısı 90 derece, köşegenleri birbirini dik ortaltayan şekil veya dörtgen” olarak tanımlanması gibi.

Öğrenciler geometride kavramları tanımlarken, bu kavramlara karşılık gelen şekillerin yardımına başvurmaktadır; öğrencinin kavram ve şekil arasında bir ilişki kurması çoğu zaman kavram yanlışlarını beraberinde getirmektedir (Ubuz & Üstün, 2004). Şekillerde de sıklıkla esas model (tipik) (Hershkowitz, 1989, 1990; Ubuz & Üstün, 2003, 2004; Ubuz, 2006) şekiller kullanılmaktadır; fakat onların özel (ayrıcılık) oldukları düşünülmemektedir ve şekillerin bir kavram için kritik olmayan özelliği kavramları tanımlarken kullanılmaktadır (Ubuz & Üstün, 2004). Her bir geometrik kavram için bir esas model şeklin benimsenmesi öğrencilerde kavram yanlışlarının oluşmasına neden olmaktadır. Geometrik şekiller, hem kavramsal hem de duyuşsal özellikler ile karakterize edilir ve geometrik şeklin anlamı tanımı tarafından yönetilir (Fishbein & Nachlieli, 1998). Bu nedenledir ki geometrik şekiller şekilsel kavramlar (Fishbein, 1993) olarak adlandırılır. Üst düzey geometrik akıl yürütmede şekilsel ve kavramsal kısıtlamalar mükemmel uyum oluşturur. Ayrıca, değişmeyen şekillere karşılık gelen kavramlar (örneğin dik üçgen) ile çeşitli şekillere karşılık gelen kavramlar (örneğin paralelkenar) ayrıştırılabilir (Fishbein & Nachlieli, 1998). Öğrencilerin üst düzey geometrik akıl yürütmeyi sağlayabilmeleri için de aynı sınıfa giren farklı şekiller arasındaki ilişkiler üzerinde durulması gerekmektedir (Ubuz, 1999a, 1999b).

Klausmeier ve Feldman (1975) bir kavramın tanımının ifade edilmesini, örneklerinin belirlenmesini ve örnek olan ve olmayanların sınıflanmasını kavram öğrenme modeli olarak önermiştir. Wilson (1990) da bütün bunların matematiksel kavramları oluşturmak için

gerekli yapı taşları olduğunu belirtmiştir. Dörtgenlerin tanımlanması, belirlenmesi ve sınıflandırılması üzerine yapılan uluslararası ve ulusal çalışmalar öğrencilerin (Akuysal, 2007; Fujita & Jones, 2007; Fujita, 2012; Monaghan, 2000; Ubuz & Üstün, 2003, 2004; Ubuz, 2006) ve öğretmen adaylarının (Örneğin, Bütüner & Filiz, 2016; Erşen & Karakuş, 2013; Türnüklü, 2014) bu konularda zorluklar yaşadıklarına işaret etmektedir. Bu çalışmalarda veriler genellikle tek kaynaktan elde edilmiştir. Hâlbuki farklı kaynaklardan elde edilen bulgular yorumların güvenilirliğini arttırmaktadır (Glesne & Peshkin, 1992). Ayrıca, bu bağlamdaki ulusal çalışmalar çoğunlukla öğretmen adayları ile gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmanın amacı 7. sınıf öğrencilerinin kavram öğrenme modeli çerçevesinde (dörtgenlerin tanımlanması, belirlenmesi ve sınıflanması) dörtgenler arasındaki ilişkiler ile ilgili kavram imajlarını seçmeli sorular, açık uçlu sorular ve sınıf içi tartışma yardımı ile incelemektir. Buradan elde edilen bulgular etkili bir geometri programı ve öğretimi tasarlamak için yararlı olacaktır.

Yöntem

Örnekleme

Ankara da 12 farklı okuldan toplam kırk 7. sınıf öğrencisi bu çalışmaya katılmıştır. Öğrencilerden 24 tanesi kız 16 tanesi ise erkektir. Öğrencilerin biri hariç diğerleri devlet okullarındandır.

Veri Toplama

Bu çalışmada veriler bir dershanede üç aşamada elde edilmiştir. İlk olarak, Van Hiele Geometri testinin (Usiskin, 1982) görsel, analitik, ve soyutlama (Van Hiele, 1986) boyutlarını içeren ilk 15 sorusu öğrencilerin dörtgenlere yönelik kavram imajlarını belirlemek için 25 dakika süre verilerek uygulanmıştır. Bu testin Türkçe'ye uyarlanması Duatepe (2000) tarafından yapılmıştır. Görsel düzeydeki öğrenciler geometrik şekil ve cisimleri bir bütün olarak algılarlar, özellikleri tanıma bağlı olarak kavrayamazlar. Öğrenciler şekillerin sadece görünüşlerini hesaba katarlar ve görünüşlerine göre şekillerin özelliklerini açıklarlar. Analitik düzeydeki öğrenciler şekillerin özelliklerini analiz etmeye başlarlar ve özellikleri tümüyle açıklayabilirler. Soyutlama düzeyinde öğrenciler, şekil sınıfları arasında bağ kurabilirler. Şekilleri, tanımlanan özelliklerine göre sınıflayabilirler. Bu 15 sorunun KR-21 güvenilirlik kat sayısı 0,57 olarak rapor edilmiştir (Duatepe-Paksu & Ubuz, 2009). Bunun nedeni de puanlar arasındaki küçük farklar ve testteki soru sayısıdır (Duatepe-Paksu & Ubuz, 2009).

Van Hiele testinde görsel boyutta olan ilk beş soruda; verilen şekiller arasından karenin (1. ve 4 soru), üçgenin (2. Soru), dikdörtgenin (3. Soru) ve paralelkenarın (5.soru) belirlenmesi istenmektedir. Analitik boyuttaki takip eden beş soruda karenin (6. Soru), dikdörtgenin (7.soru), eşkenar dörtgenin (8.soru), ikizkenar üçgenin (9. Soru), ve deltoidin (10. Soru) özelliklerinin analiz edilmesi istenmektedir. Soyutlama boyuttaki son beş soruda ise eşkenar üçgen-ikizkenar üçgen (11. Soru), üçgen-dikdörtgen (12. soru), dikdörtgen (13.

soru), dikdörtgen-paralelkenar (14. soru), ve kare-dikdörtgen-paralelkenar (15.soru) şekil sınıfları veya kavramları arasında bağ kurulması istenmektedir.

İlköğretim matematik programı van Hiele'nin diğer düşünme seviyelerini gerektirmediği için sadece ilk 15 soru kullanılmıştır (Duarte-Paksu & Ubuz, 2009). İlköğretim 1-5. sınıflar matematik öğretim programı kapsamında 3. sınıftan itibaren öğrenciler çokgenler ile ilgili geometrik cisimleri ve şekilleri tanımaya, adlandırmaya, inşa etmeye, çizmeye, karşılaştırmaya ve belli özelliklere göre gruplandırmaya başlamıştır. Diğer taraftan ilköğretim 6-8. sınıflar öğretim programında (MEB, 2005), öğrencilerin geometrik nesnelerin özelliklerini düşünerek bu özellikler arasındaki ilişkileri geliştirmeleri amaçlanmıştır. Bu çalışma kapsamında ele alınan geometri kavramlarından kare, dikdörtgen ve üçgen 3. sınıftan itibaren öğretilmeye başlanmıştır. Paralelkenar, eşkenar dörtgen, yamuk ve çokgen kavramları ise 5. sınıfta öğretilmeye başlanmıştır.

Öğrencilerden Van Hiele geometri testini yanıtlarken her bir soru için verdikleri seçeneğe istinaden gerekçelerini açıklaması istenmiştir. Van Hiele geometri testinin sonuçları ışığında, aşağıda belirtilen açık uçlu dört soru hazırlanmıştır. Bu sorular uygulama sırasında sınıfta mevcut olan 40 öğrencinin 32'sine 30 dakika süre verilerek uygulanmıştır:

- (1) Bir arkadaşınıza karenin tanımını nasıl yaparsınız?
- (2) Kare ile dikdörtgen arasındaki benzerlikler ve farklılıklar nelerdir?
- (3) Kare ile eşkenar dörtgen arasındaki benzerlikler ve farklılıklar nelerdir?
- (4) Özel dörtgenleri nasıl sınıflandırırsınız? Açıklayınız.

Son olarak da, bir öğrencinin 4. soruda yapmış olduğu sınıflamadan yola çıkarak dörtgenlerin sınıflandırılması konusunda sınıf ortamında 40 dakika boyunca bir tartışma gerçekleştirilmiştir. Bu tartışmalar kelime kelime not edilmiştir.

Veri Analizi

Öğrencilerin Van Hiele Geometri testinin her bir sorusuna verdikleri yanıtlar doğru veya yanlış olarak değerlendirilmiş ve bunun sonucunda her bir soruyu doğru yanıtlayanların sayısının dağılım tablosu oluşturulmuştur. Van Hiele Geometri testinin her bir sorusunu yanıtlarken verilmiş olan gerekçeler, dört açık uçlu sorunun yanıtları ve sınıf içi tartışma sırasındaki söylemler şekilsel kavramlar (şekilsel ve kavramsal kısıtlamalar) bağlamında içerik olarak analiz edilmiştir.

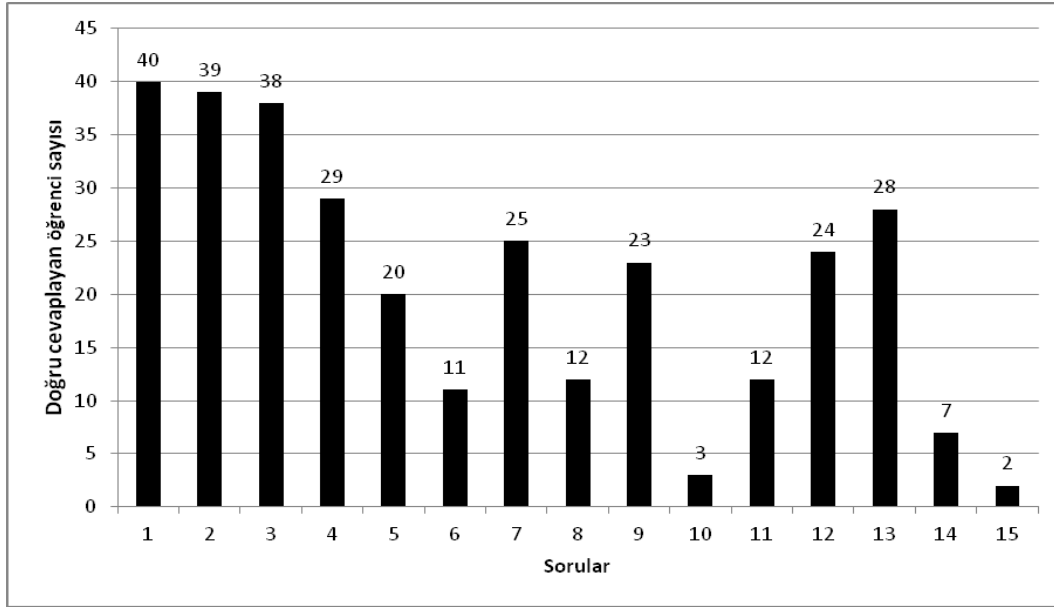
Bulgular ve Yorumlar

Çalışmadaki bulgular iki ana başlık altında sunulmaktadır: (1) Van Hiele Geometri testi: Van Hiele Geometri testi uygulamasının sonuçları, (2) dörtgenler: karenin tanımı; kare ile dikdörtgen ve eşkenar dörtgen arasındaki benzerlikler ve farklılıklar; ve dörtgenlerin sınıflandırılması.

Van Hiele Geometri Testi

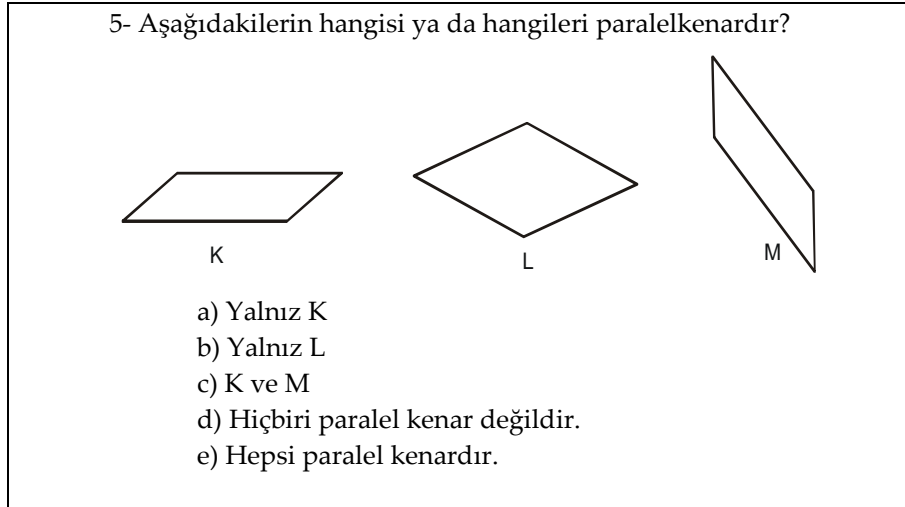
Van Hiele geometri testinin sonuçları sayısal olarak değerlendirildiğinde ortalama 8,1 soru öğrenciler tarafından doğru olarak yanıtlanmıştır. Şekil 1'de görüldüğü üzere

paralelkenar şeklinin belirlenmesine (soru 5); karenin (soru 6), eşkenar dörtgenin (soru 8), ikizkenar üçgenin (soru 9), ve deltoidin (soru 10) özelliklerinin analiz edilmesine; eşkenar üçgen-ikizkenar üçgen (soru 11), dikdörtgen-paralelkenar (soru 14) ve kare-dikdörtgen-paralelkenar (soru 15) kavramları arasında bağ kurmaya yönelik sorularda öğrencilerin oldukça fazla yanlış yanıt verdikleri gözlenmiştir.



Şekil 1 Van Hiele Geometri Testi Doğru Cevap Dağılımı

Paralelkenar şeklinin belirlenmesine yönelik olan 5. soruda, öğrencilerin hemen hemen yarısı sadece K ve M şekillerinin paralelkenar olduğunu söylemişler ve yaptıkları açıklamada “karşılıklı kenarları paralel ve eşittir” ifadelerine yer vermişlerdir. L şeklini paralelkenar olarak değerlendirmeyip eşkenar dörtgen olduğunu söylemişlerdir. Çoğu öğrenci bu soru için pek açıklama gereği duymadan kendileri için uygun olan seçeneği işaretlemiştir. Karşılıklı kenarları birbirine paralel olan dörtgenlerin paralelkenar olduğu söylenmesine rağmen öğrencilerin paralelkenar kavramını şekilsel olarak algıladıkları görülmektedir.



Şekil 2 Van Hiele Testindeki 5. Soru

Karenin özelliklerinin sorulduğu 6. soruda karenin karşılıklı kenarlarının dik olduğunun ifade edildiği seçenek öğrencilerin % 60'ı tarafından doğru olarak kabul edilmiştir. Öğrenciler açıklamalarında sıklıkla “karenin tüm kenarları birbirine diktir” ve “karenin bütün kenarları birbirini dik keser” ifadelerini vermiştir. Bu öğrencilerin “Tüm açıları dik, kenarları eşit olan eşkenar dörtgene kare denir” ifadesinde bulunan ‘tüm açıları dik’ ifadesini yanlış algıladıklarını göstermektedir.

Eşkenar dörtgenin özelliklerinin sorulduğu 8. soruda öğrencilerin %30'u soruyu doğru yanıtlamıştır. Soruya genel olarak pek bir açıklama yapılmamıştır; ancak soruyu doğru cevaplandıran öğrencilerin şekil üzerinde ek çizim yaptıkları görülmüştür.

İkizkenar üçgenin özelliklerinin sorulduğu 9. soruda öğrencilerin %57,5'i soruyu doğru olarak yanıtlamıştır. Yapılan açıklamalarda ikizkenar üçgenin iki kenarının eşit olduğunu ve dolayısıyla iki açısının eşit olması gerektiğini belirtmişlerdir. Yani, öğrenciler ikizkenar üçgen için “sadece iki açısı birbirine eşit olmalıdır” şeklinde açıklama yapmışlardır. Öğrencilerin çoğu “ölçüsü eşit olan en az iki açısı olmalıdır” seçeneğini kendi düşüncelerine en yakın olduğu için işaretlediklerini belirtmiştir.

Deltoidin özelliklerinin sorgulandığı 10. soruya öğrencilerin hemen hepsi yanlış yanıt vermiştir. Soruyu yanıtlamak için öğrencilerin ilk olarak çemberde merkez ile çember üzerindeki bir noktayı birleştiren doğru parçasının yarıçap olduğunu bilmeleri ve şekilde görmeleri gerekmektedir. Buradan da tabanları ortak iki ikizkenar üçgenin yani deltoidin oluştuğunun farkına varması gerekmektedir. Fakat test uygulandığında öğrenciler henüz çember konusunu öğrenmemiştir.

Eşkenar üçgen-ikizkenar üçgen ilişkisinin kenar uzunluğu ve açı ölçüleri çerçevesinde sorulduğu 11. soruda, öğrencilerin % 47,5 “ABC üçgeninin üç kenarı eşit uzunluktadır” ve “ABC üçgeninde, B ve C açılarının ölçüleri eşittir” önermelerinin aynı anda doğru

olamayacağını ifade etmiştir. Bu da öğrencilerin eşkenar üçgeni aynı zamanda ikizkenar üçgen olarak kabul etmekte zorlandıklarını göstermektedir.

Paralelkenarı ve dikdörtgeni birbirinden ayıran özelliklerin sorulduğu 14. soruda öğrencilerin %30'u bazı paralelkenarlar için "karşılıklı açıları eşittir" ifadesinin geçerli olmadığını ve % 27,5'ide verilen seçeneklerin her birinin bazı paralelkenarlar için doğru olmadığını düşünmüştür.

Kare, dikdörtgen ve paralelkenar kavramlarının hangilerinin birbirini içerdiği sorulan 15. soruda, 14. soruda olduğu gibi dörtgenlerin özelliklerinin incelenmesi ve sınıflandırılmasına yöneliktir. Paralelkenar, kare ve dikdörtgenin özellikleri arasında hemen doğru bir ilişki kurulmamıştır. Öğrencilerin %40'ı "dikdörtgenin tüm özellikleri, tüm paralelkenarlar için geçerlidir" seçeneğini işaretlemiştir. Yapılan açıklamalarda doğru olarak "dikdörtgende bir paralelkenardır" ifadesine yer verilmiştir. Fakat her paralelkenar dikdörtgen değildir. Bu öğrencilerin hiyerarşik ilişkiyi tam olarak anlamadıklarını veya yukarıda belirtilen seçenekte bulunan "tüm" ifadesine dikkat etmediklerini göstermektedir.

Van Hiele testindeki sonuçlar, öğrencilerin dörtgenlerin benzer ve farklı özellikleri arasında pek sağlıklı bir ilişki kuramadıkları ve dörtgenler arasında özellikle de paralelkenar, kare, dikdörtgen ve eşkenar dörtgen arasında doğru bir sınıflandırma yapamadıkları tespit edilmiştir. Öğrencilerin fazlasıyla yanlış yanıt verdikleri sorularda yapılan açıklamalar detaylı olarak incelendiğinde, öğrencilerin bazı kavram yanılgıları olduğunu ve dörtgenlerin özellikleri arasında çok kolaylıkla ilişki kuramadıkları görülmektedir. Dörtgenlerin birinin diğerini (özellikleri yönünden) kapsaması öğrenciler tarafından açıklanamamaktadır.

Dörtgenler

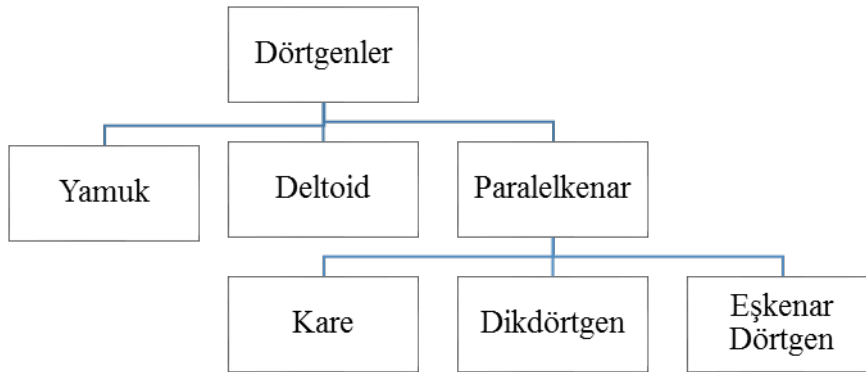
Karenin tanımı. Dokuz öğrenci karenin tanımını yaparken yazılı ifadenin yanı sıra şekilsel olarak da kareyi göstermiştir. Bu dokuz öğrenciden sadece bir tanesi "4 kenarı birbirine eşit olan paralelkenardır" gibi hiyerarşik bir tanım yapmıştır. Bu öğrenci doğru olarak kareyi paralelkenarın özel hali olarak tanımlamıştır; fakat bu tanım karenin sınırlılıklarını tam olarak ortaya koymamaktadır. Çünkü bu tanım kenarları dik olmayan eşkenar dörtgeni de kapsamaktadır. Diğer öğrenciler karenin "eşit kenar uzunlukları" ve "iç açı ölçülerinin 90 derece" olması gibi özelliklerini maddeler halinde sıralayarak bölümlü yapıda tanım oluşturmuşlardır. Dört öğrenci ayrıca "kenarlarının paralel" olması gerektiğini belirtmiştir.

Kareyi sadece yazılı ifade ile tanımlamaya çalışan 23 öğrencinin altısı karenin tanımını bir tümce ile vermiştir. Dört öğrenci "dört kenar uzunluğu birbirine eşit, bütün açıları 90° olan dörtgene kare denir" tanımı ile kareyi dörtgenin özel hali olarak ortaya koymuştur. Diğer iki öğrenci kareyi "birbirine eşit 4 kenarı olan düzgün simetrik şekle denir" veya "kare, tüm kenarları eşit olan, iç açıları toplamı 360 derece olan şekle denir" olarak tanımlamıştır. "Kare, tüm kenarları eşit olan, iç açıları toplamı 360 derece olan şekle denir" tanımı kare tanımının sınırlılıklarını tam olarak ortaya koymamaktadır.

23 öğrencinin 17'si karenin tanımını bölümlü yapıda ifade etmiştir. Bütün öğrenciler tarafından belirtilen özellik "karenin eşit kenar uzunluklarının" olmasıdır. Sekiz öğrenci "iç açı ölçülerinin 90° olması gerektiğini belirtmiştir. Sadece üç öğrenci "karşılıklı kenarların paralel" olması gerektiğini vurgulamıştır. İki öğrenci de "kare bir dörtgendir" gibi ifade kullanarak kareyi dörtgenin özel hali olarak ifade etmiştir.

Kare ile dikdörtgen ve eşkenar dörtgen arasındaki benzerlikler ve farklılıklar. Öğrencilerin van Hiele geometri testinin 14. ve 15. sorularına vermiş olduğu hatalı yanıtlar ve açıklamalar neticesinde kare-dikdörtgen ve kare-eşkenar dörtgen arasındaki farklılık ve benzerlikleri açıklamaları istenmiştir. Kare-dikdörtgen ve kare-eşkenar dörtgenin benzerlikleri doğru olarak ifade edilmiştir. Farklılıkları belirtirken ise kavramlara karşılık gelen şekillerin yardımına başvurulmuştur; öyle ki "eşkenar dörtgenin açıları birbirine eşit değildir, farklıdır. Karenin açıları 90 derecedir", "eşkenar dörtgen ve karenin duruşları ve şekilleri farklıdır", "dikdörtgenin iki uzun iki kısa kenarı vardır. Karenin bütün kenarları eşittir", vs. Öğrenciler farklılıkları belirtirken kritik olmayan özellikleri belirtmiştir. Bu eğilim sınıflandırmanın önünde bir engel teşkil etmektedir

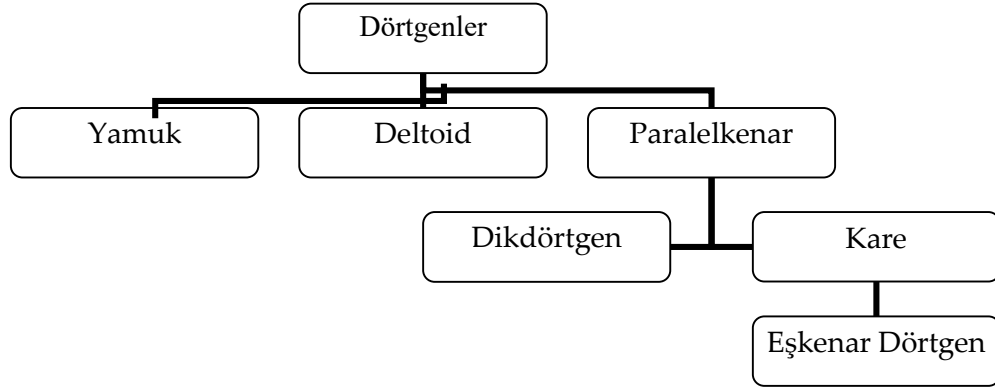
Dörtgenlerin sınıflandırılması. Dörtgenlerin sınıflandırılması istenen 4. soruda öğrenciler sınıflandırmaları dörtgenlerin benzerlik ve farklılıklarını göz önünde tutarak yapmıştır; ancak daha çok farklılıklar göz önüne alınarak sınıflandırma yapılması tercih edilmiştir. Öğrencilerin 13'ü (%40) dörtgenler arasında bir sınıflandırma yapamamıştır. Sınıflandırma yapan 19 öğrencinin yarısı yamuk ve deltoidi paralelkenardan ayrı olarak göstermiştir. Kare, dikdörtgen ve eşkenar dörtgeni paralelkenarın bir "alt kümesi" olarak göstermişlerdir. Yapılan sınıflandırmalardan en sıkça rastlanana aşağıdaki gibidir (Bakınız Şekil 3).



Şekil 3 Dörtgenler İle İlgili En Sıkça Yapılan Sınıflandırma

Hatice isimli öğrencinin sınıflandırmasından hareketle sınıf içinde bir tartışma gerçekleştirilmiştir. Hatice ilk olarak kendi yapmış olduğu sınıflandırmayı tahtaya çizmiştir

(Bakınız Şekil 4). Daha sonra öğrenciler ve öğretmen arasında aşağıda verilen diyalog gerçekleşmiştir.



Şekil 4 Hatice nin Dörtgenler ile ilgili Yaptığı Sınıflandırma

Hatice Dörtgenlerin hepsinin dört kenarı ve dört köşesi vardır. Yalnız bunlar arasında bazı farklılıklar vardır. Örneğin; açıları 90° olanlar ve olmayanlar; kenarları birbirine paralel olanlar ve olmayanlar; kenarları birbirine eşit olanlar ve olmayanlar; köşegenleri birbirine eşit olanlar ve olmayanlar gibi.

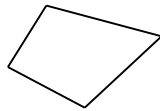
Öğretmen Neden böyle bir sınıflandırma yaptığını açıklayabilir misin? Örneğin yamuk için ne söyleyebilirsin?

Hatice Paralelkenarın iki kenarı birbirine ve kalan iki kenarı da birbirine paraleldir ancak yamuğun kenarları paralel değildir.

Uğurcan Yamuğun iki kenarı birbirine paralel olmalıdır.

Mert Yamuğun iki kenarı birbirine paraleldir ve bu kenarlar karşılıklıdır.

Hatice Yamuğun şekli budur. (tahtaya şekli çiziyor)



Öğretmen O halde yamuğu nasıl tanımlayabiliriz?

Aslıhan İki kenarı paralel olan dörtgendir.

Öğretmen Deltoidi neden yamuk ve paralelkenardan ayrı olarak düşündün?

Hatice Kenarları paralel olmadığı için ayrı olarak düşündüm.

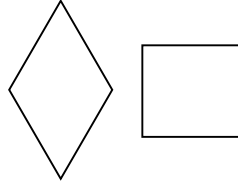
Öğretmen Paralelkenar sınıflandırması için ne söyleyebilirsin?

Hatice Kare, eşkenar dörtgen ve dikdörtgenin karşılıklı kenarları paraleldir. Bunların içinde karenin tüm kenarları birbirine eşit olduğundan ve dikdörtgenin iki kenarı birbirine eşit olduğu için ayrı ayrı düşünülmelidir.

Mert Kare ve dikdörtgen paralel kenarın altkümesidir. Ama birbirinden farklıdır.

Öğretmen Peki... Eşkenar dörtgen ile kare arasındaki ilişki için ne söyleyebilirsiniz?

Hatice Birbirlerine çok benzerler. Kenarlar birbirine eşittirler. Alan ve çevre formülleri de aynıdır. Kare ve eşkenar dörtgen birbirinin ikizi gibidir. Sadece duruşları farklıdır. Eşkenar dörtgen birbirine eşit iki ikizkenar üçgenin tabanlarından birleştirilmesi gibidir. Karenin ise farklıdır.



Öğretmen Eşkenar dörtgen ile kare arasındaki farklılık için başka ne söyleyebilirsiniz?

Caner Karenin açıları 90° 'dir. Eşkenar dörtgenin açıları 90° olmaz.

Öğretmen Kare ve dikdörtgeninin tanımlarını düşünerek sınıflandırmanızı tekrar gözden geçirin?

Hatice Karşılıklı kenarları birbirine paralel ve eşittir ayrıca açıları 90° 'dir.

Öğretmen Peki... Karede bir dikdörtgen olur mu? Çünkü onun da karşılıklı kenarları birbirine eşit ve paralel; açıları da 90° derecedir.

Özgür O zaman kareyi dikdörtgenin altına koymamız gerekiyor.

Hatice Hayır değildir çünkü karenin dört kenarı eşittir ve bu yüzden dikdörtgenden farklıdır.

Buradaki diyalogdan anlaşılacağı üzere Hatice kareyi dikdörtgen ve eşkenar dörtgenin alt kümesi olarak görmemekte ve kabul etmemektedir.

Tartışma ve Sonuç

Van Hiele testi sonuçları kare, dikdörtgen, paralelkenar ve üçgen şekillerinin belirlenmesine yönelik olan sorularda öğrencilerin daha çok paralelkenarın belirlenmesinde sorun yaşadığını göstermiştir. Çünkü öğrenciler eşkenar dörtgeni paralelkenar olarak kabul etmemiştir. Karenin, dikdörtgenin, eşkenar dörtgenin ve ikizkenar üçgenin özelliklerinin analiz edilmesine yönelik sorularda öğrencilerin en fazla karenin ve eşkenar dörtgenin özellikleri konusunda sorun yaşadığını göstermiştir. Eşkenar üçgen-ikizkenar üçgen, üçgen-dikdörtgen, dikdörtgen, dikdörtgen-paralelkenar ve kare-dikdörtgen-paralelkenar kavramları arası ilişkilerin analiz edilmesine yönelik olan sorularda da en fazla kare-dikdörtgen-paralelkenar ilişkilerinde sorun yaşamışlardır. Buradaki sonuçlar dörtgenler arasındaki ilişkiler bağlamında değerlendirildiğinde en büyük sorunun kare-dikdörtgen ve kare-eşkenar dörtgen kavramları arasında olduğunu göstermektedir. Bu kavramlar

arasındaki ilişkiler bağlamındaki zorluk başka çalışmaların bulguları ile benzerlik göstermektedir (Ubuz & Üstün, 2003, 2004; Türnüklü, 2014).

Kare-dikdörtgen ve kare-eşkenar dörtgen arasındaki benzerlik ve farklılıkların yazılmasının istendiği açık uçlu sorularda özellikle farklılıklar belirtilirken kavramlara karşılık gelen esas şekillerin kritik olmayan özellikleri belirtilmiştir. Benzer sonuç sınıf içinde yapılan tartışmada da gözlenmiştir. Bu bulgu farklı başarı seviyesindeki 8.sınıf öğrencilerinin dörtgenleri belirlemesini inceleyen Ubuz ve Üstün'nün (2003, 2004) sonuçları ile tutarlıdır. Ayrıca, öğretmen adayları ile yapılan çalışmaların bulgularıyla da benzerlik göstermektedir (Erşen & Karakuş, 2013; Türnüklü, 2014). Bu da göstermektedir ki esas model (tipik) şekiller hiyerarşik ilişkileri kavramada engel oluşturmaktadır. Kavramlar ile ilgili sadece esas model şekillerin çizilmesi, öğrencilerin öğrenmesini etkilemektedir (Ubuz & Üstün, 2004). Ubuz'un (2006) yapmış olduğu 7. sınıf matematik kitabı incelemesinde dikdörtgen ve paralelkenar ile ilgili çoğunlukla esas model şekillerin kullanıldığı rapor edilmiştir. Örneğin, dikdörtgen denildiğinde sadece iki uzun iki kısa kenarı olan dikdörtgen şeklinin sürekli kullanılması karenin dikdörtgen olarak kabul edilmesini zorlaştırmaktadır.

Kare ile ilgili yapılan tanımlar Shir ve Zaslavsky'nın (2001) kavram hiyerarşisinin derecesi bağlamında incelendiğinde görülmektedir ki çok az öğrenci kareyi paralelkenar (2. seviye), dörtgen (3. seviye) veya simetrik şekil (5. seviye) kavramlarıyla ilişkilendirmiştir. Bu ilişkilendirmeler yapılmış olmasına rağmen yapılan tanımlar kare kavramının sınırlılıklarını yansıtmamaktadır. Örneğin, "4 kenarı birbirine eşit olan paralelkenar" tanımı kareyi değil eşkenar dörtgeni kapsamaktadır. Bunun yanında karenin dikdörtgen ve eşkenar dörtgen gibi (1. seviye) kavramlarla ilişkilendirilmesi yapılmamıştır. Öğrencilerin % 78' i tarafından karenin bölümlü yapıdaki tanımları gerekli bazı özellikleri içermiş olmasına rağmen yeterli değildir. Bu tür tanımlarda karede karşılıklı kenarların paralel olması özelliği ve hiyerarşik ilişkiler göz ardı edilmiştir. Benzer bir sonuç sınıf öğretmen adaylarından birbirinden farklı üç tane kare, dikdörtgen, yamuk ve paralelkenar çizilmesinin istendiği Erşen ve Karakuş'un (2013) çalışmasında görülmektedir. Öğretmen adayları farklı çizimler yaparken ya şeklin boyutunu değiştirmiş ya da şekli döndürmüşlerdir.

Bu çalışmanın sonuçları göstermektedir ki dörtgenler arasında ilişkilerin özellikle hiyerarşik ilişkilerin kurulmasında dörtgenlere ait olan formel tanımlar ile öğrencilerin bunlara ait olan kavram imgesi arasındaki farklılaşma önem arz etmektedir. Kavram imgesi oluşumunda şekiller çok büyük rol oynamaktadır.

Öneriler

Dörtgenlerin ve aralarındaki ilişkilerin kavranabilmesi için konuların sıralanışının gözden geçirilmesi ve ilişkisel anlamaya yönelik öğretim yaklaşımların geliştirilmesi gerekmektedir. Konuların sıralanışının genelden özele doğru paralelkenar, eşkenar dörtgen, dikdörtgen ve kare çerçevesinde sunulması hiyerarşik ilişkilendirmenin tam olarak anlaşılabilmesi için uygun olabilir (Ubuz & Üstün, 2004). Bundan sonraki çalışmalarda bu konunun araştırılması gerekmektedir. Veri toplama bölümünde bahsedildiği üzere öğrenciler 3. sınıfta ilk olarak kare ve dikdörtgen kavramları ile tanıştırılmıştır. Paralelkenar

ve eşkenar dörtgen konuları ise ilk defa 5. sınıfta ele alınmıştır. Yeni yayınlanmış olan ilkökul matematik dersi öğretim programında (MEB, 2015) öğrenciler 4. sınıf sonuna kadar yine paralelkenar ve eşkenar dörtgen kavramları ile karşılaşmamaktadır. 3. ve 4. sınıflarda önceki matematik programında olduğu gibi kare ve dikdörtgen kavramları ile tanıştırılmaktadır.

Klausmeier ve Feldman'ın (1975) önerdiği kavram öğrenme modeli çerçevesinde (tanımının ifade edilmesi, örneklerinin belirlenmesi ve örnek olan ve olmayanların sınıflanması) gerçekleştirilecek farklı öğretim yaklaşımlarıyla öğrencilerin kavram imajları ile kavram tanımları arasındaki etkileşim ortaya çıkartılabilir ve böylelikle kavramlar arası ilişkileri anlaması sağlanabilir. Bir yaklaşım; öğrencilerin bir kavram ile ilgili farklı tanımlar oluşturmaları ve farklı şekiller çizmeleri istenerek ortaya çıkan çatışmalar ve çelişkiler ışığında kavramı oluşturmaları sağlanabilir. İkinci yaklaşım; öğrencilere hiyerarşik ilişkileri sorgulamasını sağlayacak sorular yöneltilerek düşüncelerini sözel ve şekilsel olarak ifade etmesi sağlanabilir. Toluk ve Olkun (2004) sınıf öğretmeni adaylarının dikkatini şekillerin özelliklerine (paralellik, açı, vb.) ve bu özelliklere göre sınıflandırmaya çekebilmek için ikizkenar üçgen ile eşkenar üçgen arasında ne tür bir ilişki vardır? Hangisi hangisini kapsar? Neden? gibi sorulara sınıfla birlikte yanıt aramışlardır. Daha sonra öğretmen adaylarının vardıkları sonuçları hem sözel hem de şema ile ifade etmelerini istemişlerdir. Sonuç olarak da bu tür etkinliklerin kişilerin geometrik düşünme düzeylerinin gelişiminde etkili olduğunu belirtmişlerdir. Üçüncü yaklaşım; şekilleri manipüle etme ve üzerinde ölçüm yapma imkanı veren dinamik bilgisayar yazılımları (örneğin, Geometer's Sketchpad) kullanılarak geometrik kavramlar ve aralarındaki ilişkiler keşfettirilebilir (Örneğin, Ubuz, Üstün, & Erbaş, 2009). Son yaklaşım; öğrencilerin cümlelerdeki ifadelerin ne anlama geldiği üzerine düşünmesi sağlanabilir. Örneğin, "dikdörtgenin tüm özellikleri, tüm paralelkenarlar için geçerlidir" ifadesinde tümün iki farklı ifadede ne anlama geldiği veya "karenin tüm kenarları birbirine diktir" "karenin bütün kenarları birbirini dik keser" ifadelerinde tüm ve bütün ifadelerinin ne anlama geldiği üzerinde durulması gereken durumlardır. Dil bilgisi dersinde de geometri gibi matematiksel konulardaki ifadelerin ne anlama geldiği dil açısından tartışılabilir. Böylelikle dil bilgisi ve matematik dersleri arasında ilişki kurulabilir ve öğrenme kolaylaştırılabilir.

Teşekkür

Veri toplama sürecindeki katkılarından dolayı Ali Oktay KOÇ' a çok teşekkür ederim.

Kaynakça

- Akuysal, N. (2007). *İlköğretim 7. sınıf öğrencilerinin 7. sınıf ünitelerindeki geometrik kavramlardaki yanlışları*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Konya, Türkiye.
- Bütüner, S. Ö. & Filiz, M. (2016). Matematik öğretmeni adaylarının dörtgenleri sınıflandırma becerilerinin incelenmesi. *Alan Eğitimi Araştırmaları Dergisi*, 2(2), 43-56.
- De Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18.
- Duatepe, A. (2000). *An investigation on the relationship between Van Hiele geometric level of thinking and demographic variables for preservice elementary school teachers*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.
- Duatepe-Paksu, A. & Ubuz, B. (2009). Effects of drama-based geometry instruction on student achievement, attitudes and thinking levels. *Journal of Educational Research*, 102(4), 272-286.
- Erşen, Z. B., Karakuş, F. (2013). Sınıf öğretmeni adaylarının dörtgenlere yönelik kavram imajlarının değerlendirilmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 4(2), 124-146.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.
- Fischbein, E. & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education*, 20(10), 1193-1211.
- Fujita, T. & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, 9 (1&2), 3-20.
- Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 60-72.
- Glesne, C., & Peshkin, A. (1992). *Becoming a qualitative researcher: An introduction*. New York: Longman.
- Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry-two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 61-76.
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Klausmeier, H.J. & Feldman, K. V. (1975). Effects of a definition and varying number of examples and nonexamples on concept attainment. *Journal of Educational Psychology*, 67(2), 174-178.
- Milli Eğitim Bakanlığı-Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (MEB) (2005). *İlköğretim matematik dersi öğretim programı ve kılavuzu (6-8. Sınıflar)*. Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü.
- Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) (2015). *İlkokul matematik dersi (1,2,3, ve 4 sınıflar) öğretim programı*. Ankara: Milli Eğitim Basımevi.

- Monaghan, F. (2000). What differences does it make? Children's views of the differences between some quadrilaterals. *Educational Studies in Mathematics*, 42, 179-196.
- Shir, K. & Zaslavsky, O. (2001). What constitutes a (good) definition? The case of a square. In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 161-168). Utrecht: Utrecht University.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Toluk, Z. & Olkun, S. (2004). Sınıf öğretmenleri adaylarının geometrik düşünme düzeyleri. *Eğitim ve Bilim*, 29(134), 55-60.
- Türnüklü, E. (2014). Dörtgenlerde aile ilişkilerinin yapılandırılması: İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ders planlarının analizi. *Eğitim ve Bilim*, 39(173), 197-207.
- Ubuz, B. (1999a). 10. ve 11. sınıf öğrencilerinin temel geometri konularındaki hataları ve kavram yanlışları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 16-17, 95-104.
- Ubuz, B. (1999b). 10 ve 11. Sınıf Öğrencilerinin Geometri'de Kavram Yanlışları ve Cinsiyet Farklılıkları. *Öğretmen Eğitiminde Çağdaş Yaklaşımlar Sempozyumu*, Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi, İzmir, 11, 179-184.
- Ubuz, B. & Ustun, I. (2003). Figural and conceptual aspects in identifying polygons. *Proceedings of the 27th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.1, p. 328), USA.
- Ubuz, B. & Ustun, I. (2004). Figural and conceptual aspects in defining and identifying polygons. *Eurasian Journal of Educational Research*, 16, 15-26.
- Ubuz, B. (2006). Student conceptions and textbook messages: Polygons. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.1, p. 347), Charles University, Prague, Czech Republic.
- Ubuz, B., Üstun, I., & Erbaş, A. K. (2009). Effect of dynamic geometry environment on immediate and retention level achievements of seventh grade students. *Eurasian Journal of Educational Research*, 35, 147-164.
- Usiskin, Z. (1982). Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry. Columbus, USA: ERIC.
- Van Hiele, P. M. (1986). Structure and insight. A theory of mathematics education. London: Academic Press.
- Vlassis, J. (2008). The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization. *Philosophical Psychology*, 21(4), 555-570.
- Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356-366.
- Wilson, P. S. (1990). Inconsistent ideas related to definitions and examples. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12 (3-4), 31-47.